КОНЕЧНО-АВТОМАТНЫЕ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Дискретная система представляется в виде конечного автомата, преобразующего дискретную информацию и меняющую свои состояния в дискретные моменты времени

Конечный автомат – автомат, у которого множества значений внутренних состояний, входных/выходных сигналов конечны.

Элементы, характеризующие конечный автомат как математическую схему:

1. конечное множество входных сигналов (управлений) X - входной алфавит системы, сигналы в момент времени принимает значения из этого алфавита, т.е. ;
2. конечный внутренний алфавит , cостояние автомата принимает значения из этого внутреннего алфавита, т.е.:

*,* где

1. конечный выходной алфавит Y:
2. начальное состояние конечного автомата
3. фиксация переходов определяет состояние конечного автомата в некоторый момент времени , если в предшествующий момент состояние , а на вход поступил сигнал

т.е. фиксация переходов может быть проинтерпретирована как фиксация в модели дискретной системы;

6) функции выходов конечного автомата определяются его типом (т.е. типом конечного автомата).

Различают:

**- автомат Мили**

выход определяется состоянием автомата в предыдущей момент времени и сигналом, поступающим на вход , т.е.

т.е. фиксация выходов конечного автомата может быть сопоставлена (может соответствовать) с функцией модели дискретной системы;

**- автомат Мура**

выход определяется состояниями автомата в тот же момент времени и не зависит от входа системы

ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

1. КА в каждый момент времени находится в определенном состоянии (в начальный момент времени ­- в начальном состоянии);
2. в состоянии автомат способен воспринимать на входе сигнал (управление) , перейти в новое состояние и выдать соответствующий выходной сигнал .

В конечном автомате функции переходов и выходов задаются с использованием соответствующих таблиц.

**Пример.** Моделирование функционирования дискретной системы с использованием конечных автоматов.

Система имеет 2 фазовые координаты, 1 вход (для управления) и один выход.

Модель системы в общем виде:

Множество значений фазовых координат ограничено:

тогда множества возможных состояний системы имеет вид:

Множество возможных значений управления ограничено и имеет вид:

Множество возможных значений выхода системы ограничено имеет вид:

т.к. речь идет о конечных алфавитах, то фиксации переходов и выходов представлены в виде таблиц переходов и выходов:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | a | b | c |  | a | b | c |
| (1, 1) | (2, 1) | (2, 2) | (3, 2) | (1, 1) | β | β | α |
| (1, 2) | (1, 2) | (1, 2) | (1, 2) | (1, 2) | β | α | α |
| (2, 1) | (2, 2) | (3, 1) | (2, 2) | (2, 1) | α | α | β |
| (2, 2) | (1, 1) | (1, 1) | (1, 1) | (2, 2) | β | β | β |
| (3, 1) | (3, 1) | (3, 1) | (1, 1) | (3, 1) | α | α | β |
| (3, 2) | (3, 2) | (3, 2) | (3, 2) | (3, 2) | α | β | α |

Например, ;

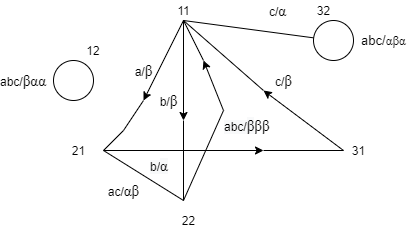
При этом, и не зависят от времени.

ПРЕДСТВЛЕНИЕ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ В ВИДЕ ГРАФА СОСТОЯНИЙ

1. Каждому состоянию ставится в соответствие вершина графа , вершины и связываются направленной дугой при условии, что система переходит из и под действием управления .
2. Управление , переводящее в совместно с выходным значением отличается над стрелкой.
3. Так как система из исходного состояния может быть переведена в состояние с использованием различных управлений и при этом получаются различные выходы , то дуга сопоставляется с соответствующей совокупностью управлений и выходов .

**Пример обозначения дуги:**

**Пример графа состояний функционирования дискретной системы:**



ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ СИСТЕМ

1. Модель (непрерывная) конкурирующей борьбы за ресурсы.

n конкурирующих элементов (I – индекс элемента). Все элементы однотипны и конкурируют за один и тот же ресурс.

*–* доля ресурсов, находящихся в момент времени в распоряжении i-го элемента.

– вектор текущего состояния системы.

– способность элемента i захватывать ресурсы в единицу времени (т.е. – некоторый коэффициент, определяющий долю свободного ресурса, освобожденного другим элементом, которую может захватить i-ый элемент).

– способность элемента терять ресурсы в единицу времени ( – коэффициент, определяющий долю имеющегося ресурса, которая может быть освобождена и использована другими элементами).

Тогда при n = 2 модель конкурирующей борьбы за ресурсы имеет вид

(1)

Доля освобожденного ресурса, которую может захватить элемент 2

Количество ресурсов, которое может освободить элемент 1

Доля освобожденного ресурса, которую может захватить элемент 1

Количество ресурсов, которое может освободить элемент 2

Доля ресурса, находящегося в распоряжении элемента 2 определяется:

(2)

Т.о уравнения (1) и (2) описывают динамику изменения запасов ресурсов у каждого элемента системы.

1. Дискретная модель выполнения работы определенного типа.

– переменная, определяющая объем выполняемой работы на предприятии. Таким образом переменная определяет изменение счетчика каждой из работ s, т.к. работа еще не начала выполняться), , если работа полностью выполнена.

– интенсивность выполнения s-ой работы в единицу времени (в течение такта времени).

Изменение состояния s-ой работы на предприятии описывается моделью:

При этом на интенсивность положены ограничения:

1. Непрерывная и дискретная модели изменения производительности предприятия при учете влияния капиталовложений.

- непрерывная модель:

Матрица коэффициентов прямых затрат определяет, на какую долю процентов выражает производительность в ответ на единичные капиталовложения в производство. Управление U(t) – количество единиц капитальных вложений в производство.

Дискретный аналог модели управления ростом производительности работы предприятия:

ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Исходными при построении модели дискретных линейных систем являются отображения вида:

Текущее состояние может быть представлено в виде суммы свободного состояния ( и вынужденного состояния (:

Либо в виде отображений:

Где – первое управление на интервале [mT, nT),

– нулевое состояние в момент времени mT.

Таким образом – нулевая входная последовательность, состоящая из нулей.

По аналогии с непрерывными системами отображение может быть представлено с использованием матрицы А, интерпретируемой как переходная матрица системы из некоторого состояния при условии, что на интервале [mT, nT) – нулевая входная последовательность . Тогда:

Представление выражения (1) в ортогональном базисе векторов:

где r – число элементов в векторе

Выражение для определяется при условии, что последовательность может быть заменена значением в точке mT, т.е. .

Тогда:

где – отображение, определяющее реакцию системы, находящейся в нулевом состоянии, на единичное управление (последовательность единичных управлений на интервале [mT, nT)).

По аналогии с непрерывными системами отображение может быть представлено в виде некоторой векторной функции (вектора функций , имеющего обозначение B(m).

Таким образом B(m) –вектор функций , определяющих реакцию каждой компоненты (j-ой) вектора состояния на единичное входное воздействие. В матричном виде выражение для определения :

В виде представления вектора в ортогональном базисе векторов:

Тогда обобщенное выражение для определения i-ой координаты вектора z и вектора системы, обобщенное выражение для определения вектора и вектора, представленного в ортогональном базисе векторов, следующее:

Таким образом, каждая компонента вектора определяет реакцию i-ой компоненты вектора на скалярное управление x(m). Для выхода системы:

где – скаляр-реакция выхода на единичное управление.

Уравнения в матричном виде:

ДИСКРЕТНО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ (ДИСКРЕТНО-ВЕРОЯТНОСТНЫЕ КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ)

Вероятностный автомат – дискретный потактовый преобразователь информации, функционирование которого зависит от текущего состояния и может быть описано стохастически.

Детерминированный автомат – каждой паре (т.е. состоянию и входу) однозначно ставится в соответствие пара (состояние и выход) с помощью функций переходов и выходов.

Особенности вероятностного автомата:

1. Каждой паре однозначно не ставится в соответствие одна из пар ;
2. Задаются условные вероятности появления пар при условии, что реализовывалась пара , т.е.:

Таким образом, – вероятность перехода автомата в сочетание и появления выходного сигнала при условии, что автомат находился в состоянии и на его вход поступил сигнал .

1. Для вероятностного автомата не задается однозначно начально состояние , а задаются безусловные вероятности, с которыми каждое из состояний может оказать начальным:

Данное условие задает начальное безусловное распределение вероятностей на конечном внутреннем алфавите Z (пример начального безусловного распределения вероятностей сведения в таблицу распределения)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

Условия для начальных вероятностей:

ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

Для каждой пары (состояние/вход) ( из множества (т.е. каждому состоянию может соответствовать множество выходов) задается условное распределение вероятностей перехода в другие состояния и формирования выхода (т.е. )

Таким образом, число распределений вероятностей переходов в новые состояния и формирования выходов равно числу возможных пар (состояние/вход).

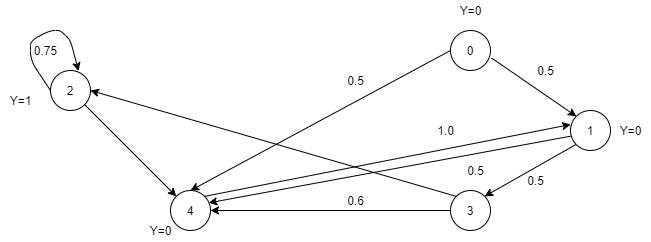
Условия для вероятностей:

Исходное состояние, вход

Конечное состояние, выход

То есть, сумма вероятностей перехода в новые состояния и формирования соответствующего выхода равна 1.

**Пример** вероятностного автомата при z={0, 1, 2, 3, 4}, Y={0, 1} и фиксированным входном сигнале . T.e. если в каждом из состояний реализуется управление , то возможны переходы в соответствующие состояния и соответствующие выходы (предполагается, что управление может быть применимо в каждом из состояний и при этом возможны (с соответствующими состояниями) переходы в другие состояния).



На схеме графа случайно определяются переходы в новые состояния (под действием управления), но не случайными, а детерминированными являются выходы.

**Вывод:** для каждого возможного управления ставится в соответствие граф переходов. Описание вероятностного автомата предполагает задание законов распределения вероятностей для всех пар .

ОБОБЩЕННАЯ ФОРМА ВЕРОЯТНОСТНОГО АВТОМАТА

Предполагает задание для каждого исходного сочетания и каждого управления совместных законов распределения (вероятностей) перехода в новые состояния и выходов системы (т.е. случайными являются переходы и выходы системы).

**Пример таблицы совместного распределения** переходов в новые состояния и выходов системы (для одного управления и одного из состояний системы , то есть, указываются вероятности переходов из состояния под действием управления в другие состояния и появления соответствующих выходов системы) – вероятность выхода, - вероятность состояния.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | .. |  | .. |  |
|  | z / y |  | .. |  | .. |  |
|  |  |  | .. |  | .. |  |
| .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. |
|  |  |  | .. |  | .. |  |
| .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. |
|  |  |  | .. |  | .. |  |

Таким образом, в каждом из состояний возможно S выходов (таблица описывает одно исходное состояние и один управляющий вход).

**Правила, формируемые для совместных законов распределения:**

1. для состояний
2. - вероятность перехода в l – состояние равна сумме вероятностей появления в l – состоянии соответствующих векторов.
3. ,
4. для выходов
5. , то есть суммарная вероятность появления вектора s при переходе в различные состояния равна 1.

Обобщенный вероятностный автомат, у которого выход зависит от входа и предыдущего состояния – условие для определения совместной вероятности.

ПОНЯТИЕ Y-ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО АВТОМАТА

Если выходной сигнал вероятностного конечного автомата определяется детерминировано, то есть не участвует в совместных законах распределения, то такой автомат – Y-детерминированный автомат.

Таким образом, для Y-вероятностного автомата может быть задан закон распределения вероятностей перехода из одного состояния в другое (т.е. закон распределения состояний для каждого исходного состояния , таким образом определяется ).

Таким образом, задается один закон распределения вероятностей переходов из каждого состояния системы в одно из возможных последующих состояний.

**Свойства дискретного случайного процесса,** описываемого Y-вероятностным автоматом:

1. В любой момент времени t состояние процесса может принять значение из конечного множества состояний z = {}, т.е. соответствует одному из в любой момент времени;
2. Вероятность перейти в состояние в любой момент времени t при условии, что в моменты t – 1 реализовалось состояние , зависит только от сочетания и не зависит от предыдущих состояний.

Такая случайная последовательность состояний случайного процесса из конечного множества возможных состояний, называется конечной марковской цепью. Переходы КМЦ из состояния в в состояние в (t) описываются матрицей переходов.

Пример матрицы переходов для КМЦ:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | .. |  | .. |  |
|  |  | .. |  | .. |  |
| .. | .. | .. | .. | .. | .. |
|  |  | .. |  | .. |  |
| .. | .. | .. | .. | .. | .. |
|  |  | .. |  | .. |  |

Строки матрицы переходов соответствуют предшествующим состояниям, столбцы – последующим.

Сумма элементов по строке равна 1 (вероятность перехода из предыдущего состояния в возможные последующие).

Матрица образована условными вероятностями, в ней отсутствуют входы и выходы, следовательно, каждое состояние зависит только от предыдущего состояния.

**Пример** моделирования функционирования конвейерной системы с учетом отказов и восстановления оборудования при использовании конечных марковских цепей.

Выполняемые работы реализуются в системе конвейерного типа (выполняется 2 работы). Схема использования сегментов конвейера при реализации работ указана ниже.

4

3

2

1

Таким образом, 1-ю работу реализуют приборы 1, 3 и 4; 2-ю работу – приборы 2 и 3.

Каждый из приборов может находится в следующих состояниях:

1. Работоспособное; 2) Отказ прибора; 3) Ремонт; 4) Простой;

Соответственно, система может находиться в следующих состояниях:

1. Рабочее;
2. Отказал i-ый прибор, остальные j-е приборы;
3. Ремонт i-ого прибора, остальные работоспособные простаивают;
4. Переналадка j-ых приборов (работоспособные i-ые на реализацию другого вида работ.

Таким образом, соответствующие состояния могут быть обозначены - работоспособное состояние всей системы за пятым выполнением p-ой работы .

– состояние отказа i-ого прибора при работоспособном состоянии других j-ых приборов ().

- состояние ремонта i-ого прибора, все остальные предметы находятся в состоянии простоя.

- состояние переключения системы на выполнение p-го типа работ.

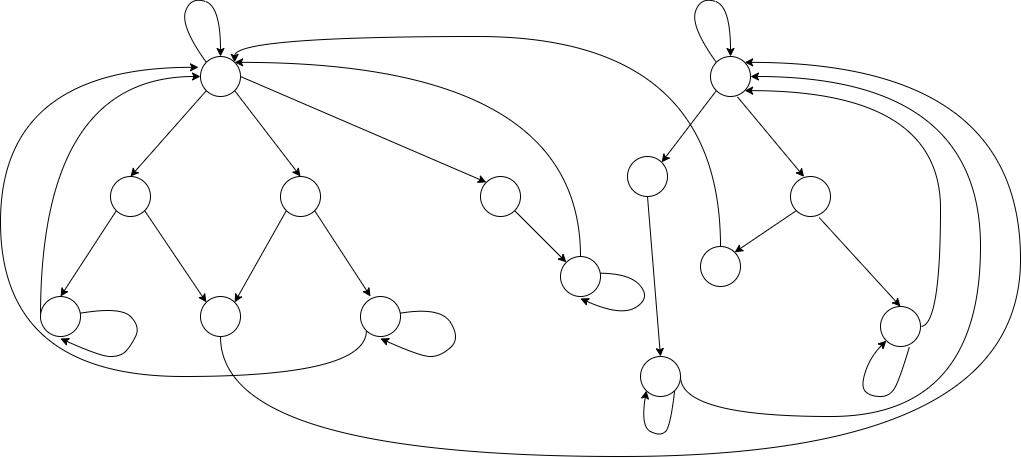
Вероятности отказов приборов – заданы.

Вероятности восстановления приборов – заданы.

Таким образом, имеются 2 стратегии восстановления работоспособности системы:

1. Стратегия ремонта
2. Стратегия перекладки на выполнение альтернативных видов работ. При этом предполагается, что заданы вероятности выбора соответствующих стратегий восстановления работоспособности системы.

**Вид графа вероятностного автомата** функционирования системы с отказами обрабатывающих приборов:



Вероятность перехода из состояния в состояние равна 1; вероятность перехода из состояния в состояние равна 1;